Prezentare comentată a unor subiecte din proba de matematică pentru admiterea 2012 în clasa pregătitoare la Lycee Luis-le-Grand, Paris, probă pentru elevii care depun candidatură în România – Partea I

Alexandru Constantinescu – Colegiul Naţional Spiru Haret, Bucureşti
Liliana Maria Toderiuc – Şcoala Gimnazială nr. 56, Bucureşti
Gabriel Vrînceanu – Colegiul Naţional Iulia Haşdeu, Bucureşti

Introducere

Clasele pregătitoare pentru Marile Şcoli (**CPGE – Classes préparatoires aux Grandes Ecoles)** oferă absolvenţilor de bacalaureat o alternativă la pregătirea admiterii în studiile universitare. Admiterea în aceste „classes prépas" este una foarte selectivă. Clasele pregătitoare au drept scop creşterea nivelului de competenţă pentru absolvenţii de liceu care doresc să aplice pentru continuarea studiilor de 3 ani la „Grande Ecole".
Programele de studiu pentru aceste clase pregătitoare sunt organizate pluridisciplinar, oferind elevilor posibilitatea de acces, în funcţie de filiera urmată, la concursurile şi examenele şcolilor de tipul „Grandes Ecoles", pe diferite filiere: inginerie, comerţ, ştiinţe politice, şcoli normale superioare etc. Proba de admitere în Lycee Luis-le-Grand, corespunzătoare disciplinei Matematică, pentru filiera ştiinţifică, are o durată de 4 ore, conţinând o serie de 11 probleme.
Pornind de la testul propus în 2012, la nivelul României, sub coordonarea Societăţii de Ştiinţe matematice din România (SSMR), prezentăm în materialul de faţă rezolvarea comentată a unuia dintre cele 11 subiecte constituente ale probei de matematică.
Dintre cele 11 subiecte am ales să abordăm în materialul de faţă problema 8 a testului propus în anul 2012, atât datorită faptului că permite o trecere în revistă a mai multor contexte matematice importante – proprietăţi de funcţii, elemente de artimetica numerelor întregi, cât şi datorită faptului că permite abordări alternative, potrivite diferitelor etape de cunoaştere matematică – de la clasele gimnaziale până la clasele superioare de liceu şi, nu în ultimul rând datorită faptului că permite evidenţierea unor probleme de sine stătătoare şi generalizări de diferite grade.
Adresabilitatea materialului vizează atât profesorii de matematică care predau la nivel liceal, dar şi la nivel gimnazial, precum şi pe elevi, care prin prezentarea graduală şi evidenţiind alternative pot întări deprinderi şi comportamente care privesc atât strategii de rezolvare de probleme dar şi modul în care se poate comenta, concluziona sau studia consecinţe şi derivaţii ale unor contexte matematie iniţiale.

Comments about mathematics subjects for the 2012 admission to the Lycee Luis-le-Grand class, Paris, proof for students who apply in Romania - Part I

Alexandru Constantinescu - Spiru Haret National College, Bucharest
Liliana Maria Toderiuc - Gymnasium School no. 56, Bucharest
Gabriel Vrinceanu - Iulia Haşdeu National College, Bucharest

Introduction

Grand Prix classes for Grand Ecole (CPGE) offer secondary school graduates an alternative to admission to university studies Admission to these "prépas classes" is a very selective one. The preparatory classes aim to increase the level of competence for high school graduates who wish to apply for the continuation of their 3-year studies at Grande Ecole.
The study programs for these preparatory classes are multidisciplinary, giving students the opportunity to access, according to the following course, the competitions and exams of "Grandes Ecoles" schools, on different branches: engineering, commerce, political science, upper secondary schools etc. The admission test in Lycee Luis-le-Grand, corresponding to the Mathematics discipline, for the scientific field, has a duration of 4 hours, containing a series of 11 problems.
Starting from the proposed test in 2012, in Romania, under the coordination of the Romanian Mathematical Sciences Society (SSMR), we present in the present material the commented solution of one of the 11 constituent subjects of the mathematics test.
Of the 11 topics, we have chosen to address the 8th issue of the proposed test in 2012, both because it allows a review of several important mathematical contexts - function properties, arithmetic elements of integers, and thanks the fact that it allows alternative approaches appropriate to the various stages of mathematical knowledge - from upper secondary to upper secondary schools, and last but not least because it allows to highlight stand-alone problems and generalizations of varying degrees.
The addressability of the material is aimed at both mathematics teachers who teach at high school and gymnasium levels as well as pupils who, through gradual presentation and highlighting alternatives, can strengthen skills and behaviors that concern both problem-solving strategies and how can comment, conclude or study consequences and derivations of some initial math contexts.

ENUNŢ (Exerciţiul 8 al testului corespunzător anului 2012)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x$**.**

a) Demonstraţi că există două valori reale x, y **distincte, pentru care** $f(x)=f(y)$**.**

b) Demonstraţi că nu există perechi de numere raţionale distincte (x,y)**, pentru care** $f(x)=f(y)$**.**

Rezolvare şi comentarii a):

Metoda 1 – clasa a IX-a.

Metoda ţine cont de o abordare particulară, specifică verificării condiţiei de injectivitate a unei funcţii, contra-e prin identificarea unui contra-exemplu:
Studiaţi injectivtatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, adică dacă oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$, atunci $f(x)=f(y)$.

Într-un astfel de caz, în cazul intuiţiei neîndeplinirii condiţiei de injectivitate, ne putem orienta spre a identifica o valoare convenabilă a din codomeniul funcţiei, pentru care ecuaţia $f(x)=a$ (*) admite cel puţin două soluţii distincte din domeniul de definiţie. Dacă 0 este element al codomeniului, o abordare deseori facilă este rezolvarea ecuaţiei $f(x)=0$.

Şi în cazul de faţă, $f(x)=0$ implică $x^3-2x=0$, de unde, prin utilizarea metodei factorului comun obţinem echivalent $x(x^2-2)=0$, de unde utilizând proprietatea produsului nul de numere, se obţin cazurile $x=0$ (o primă soluţie convenabilă, ca aparţinând domeniului de definiţie şi îndeplinind condiţia de număr real cerută de problemă – în acest caz părând trivial, dar existând probleme în care testarea poate exclude o valoare ca neîndeplinind setul de condiţii impuse în enunţ), respectiv $x^2-2=0$, echivalentă cu $x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0$, de unde se obţine relaţia $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$, ceea ce conduce la soluţiile $x=\sqrt{2}$, respectiv $x=-\sqrt{2}$, valori care îndeplinesc condiţiile din enunţ. În concluzie, alegând oricare două numere distincte dintre $0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$, funcţia ia aceeaşi valoare , 0, ceea ce încheie demonstraţia.

Metoda 2 – clasa a XI-a.

Metoda utilizează proprietăţi de monotonie, continuitate şi derivabilitate, precum şi consecinţe ale proprietăţilor de derivabilitate a funcţiilor.
Cum funcţia este elementară (polinomială), este o funcţie continuă şi derivabilă pe tot domeniul de definiţie.
Cum $f'(x)=3x^2-2$ şi ecuaţia $f'(x)=0$ are drept mulţime a soluţiilor $S=\left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$, rezultă că funcţia f admite două puncte critice importante pentru completarea tabelului de variaţie. De asemenea, cum derivata funcţiei are o lege de gradul al doilea, semnul derivatei depinde de semnul coeficientului dominant (al lui x^2) în acest caz pozitiv, ceea ce generează următorul tabel:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			maxim (local)		minim (local)		

Ţinând cont de domeniul de definiţie ($\mathbb{R}$), de continuitatea funcţiei pe acest domeniu şi de schimbarea de monotonie (cel puţin două intervale de monotonie diferită), rezultă că funcţia nu este injectivă, deci îndeplineşte condiţia din enunţ.
O astfel de abordare reprezintă o argumentare (demonstraţie) care nu necesită identificarea unor valori particulare care să convină enunţului şi este necesară ca alternativă la cerinţa similară pentru alte categorii de funcţii, la care rezolvarea ecuaţiei (*) nu este una facilă.

Comentarii:

Putem considera că această cerinţă – propusă elevilor care sunt în clase ale învăţământului secundar superior sau chiar au absolvit liceul – este una de nivel uşor, permiţând utilizarea metodei 1, atât din punct de vedere al legii, cât şi din punct de vedere al abordării simple a ecuaţiei $f(x)=0$.

Rezolvare şi comentarii b):

Corelat cu cerinţa a) avem deja exemplu de numere reale distincte pentru care funcţia înregistrează aceeaşi valoare, însă restricţia studiului pe mulţimea numerelor raţionale aduce un plus de dificultate care presupune o cu totul abordare, niciuna dintre metodele anterioare nepermiţând rezolvarea cerinţei de faţă.

În acest sens, pornind de la prelucrarea condiţiei $f(x)=f(y)$, aceasta este echivalentă cu $f(x)-f(y)=0$, precum şi cu relaţia $(x-y)(x^2+xy+y^2-2)=0$ (**), unde am ţinut cont de formula de calcul prescurtat valabilă pentru orice pereche de numere reale, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

În ipoteza $x \neq y$ raţionale, rezultă că egalitatea (**) implică $x^2+xy+y^2-2=0$ (***).
Ţinând cont de raţionalitatea valorilor care trebuie să verifice relaţia (***), putem considera $x=\frac{a_1}{b_1}, y=\frac{a_2}{b_2}$, cu $a_1,b_1,a_2,b_2 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \cdot b_2 \neq 0$ şi $(a_1,b_1)=1,(a_2,b_2)=1$.
Ecuaţia (***) devine în aceste notaţii $a_1^2b_2^2+a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2=2b_1^2b_2^2$ (****).

Având în vedere paritatea membrului drept, cercetarea poate continua printr-o cazuistică generate de paritatea / imparitatea necunoscutelor din relaţia (****), obţinându-se astfel:

Cazul I:

a_1 par, ceea ce implică din condiţia de prime între ele că b_1 impar;
şi
a_2 par, ceea ce implică din condiţia de prime între ele că b_2 impar.

Rezultă că a_1^2, a_2^2, a_1a_2 sunt expresii divizibile cu 4 ($\equiv 0 (\bmod 4)$), deci membrul stâng este divizibil cu 4, însă, ţinând cont de imparitatea expresiilor b_1 şi b_2, rezultă că expresia $2b_1^2b_2^2$ este divizibilă cu 2 dar nu şi cu 4, ceea ce implică faptul că membrul drept al relaţiei (****) nu este divizibil cu 4, egalitatea (****) neputând fi posibilă pentru acest caz.

Cazul al II-lea:

a_1 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_1 par;
şi
a_2 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_2 par.

Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$, cu presupunerea $k_1 \le k_2$ (*****), care nu diminuează generalitatea cazului, şi $b_1^{'}, b_2^{'} \in \mathbb{Z}$, impare, astfel încât $b_1 = 2^{k_1} b_1^{'}$ şi $b_2 = 2^{k_2} b_2^{'}$.

➔ Rezultă pentru membrul stâng al relaţiei (****):

$$2^{2k_2} \mid a_1^2 b_2^2 \text{ şi } 2^{2k_2+1} \nmid a_1^2 b_2^2,$$
$$2^{2k_1} \mid a_2^2 b_1^2 \text{ şi } 2^{2k_1+1} \nmid a_2^2 b_1^2,$$
$$2^{k_1+k_2} \mid a_1 a_2 b_1 b_2 \text{ şi } 2^{k_1+k_2+1} \nmid a_1 a_2 b_1 b_2,$$

ceea ce implică, ţinând cont şi de condiţia (*****), că membrul stâng al relaţiei (****) se divide prin 2^{2k_1} şi nu se divide prin 2^{2k_1+1}, deoarece după darea lui 2^{2k_1} ca factor comun, cele trei expresii rămase în paranteză sunt fie toate trei impare – în cazul $k_1 = k_2$, fie sunt două pare şi una impară – în cazul $k_1 < k_2$, deci valoarea parantezei este de tip impar.

➔ Rezultă pentru membrul drept al relaţiei (****) că $2^{1+2k_1+2k_2} \mid 2 b_1^2 b_2^2$.

Cum $1 + 2k_1 + 2k_2 > 2k_1$, rezultă că după simplificarea relaţiei (****) prin 2^{2k_1}, membrul stâng devine impar, iar membrul drept rămâne par, egalitatea neputând fi îndeplinită în acest caz.

Cazul al III-lea:

a_1 par, ceea ce implică din condiţia de prime între ele că b_1 impar;
şi
a_2 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_2 par.

Rezultă că $a_1^2, a_1 b_2$ implică faptul că primii doi termeni ai membrului stâng al relaţiei (****) sunt expresii divizibile cu 2 ($\equiv 0 (\bmod 2)$) şi expresia $a_2^2 b_1^2$ rămâne la fel ca în cazul anterior impară, deci membrul stâng este impar, pe când membrul drept este par, egalitatea (****) neputând fi posibilă pentru acest caz.

Cazul al IV-lea:

a_1 par, ceea ce implică din condiţia de prime între ele că b_1 impar;
şi
a_2 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_2 impar.

Rezultă că $a_1^2, a_1 b_2$ implică faptul că primii doi termeni ai membrului stâng al relaţiei (****) sunt expresii divizibile cu 4 ($\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$) şi expresia $a_2^2 b_1^2$ este impară, deci membrul stâng este impar, pe când membrul drept este par, egalitatea (****) neputând fi posibilă pentru acest caz.

Cazul al V-lea:

a_1 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_1 impar;
şi
a_2 impar, ceea ce poate permite din condiţia de prime între ele că b_2 impar.

Cum toate variabilele prezente în relaţia (****) sunt impare, membrul stâng reprezintă suma a trei expresii impare, deci este impar, în timp ce membrul drept este în mod evident par, ceea ce afirmă că şi în acest ultim caz egalitatea (****) nu este posibilă.

În concluzie, cazuistica prezentată, generată de criteriul parităţii / imparităţii necunoscutelor prezente în relaţia (****) epuizează toate posibilităţile şi cum în fiecare caz relaţia s-a dovedit imposibil de verificat de valori întregi, rezultă că egalitatea $a_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 = 2 b_1^2 b_2^2$ nu este verificată pe mulţimea numerelor întregi, în ipotezele suplimentare ale problemei.

În aceste condiţii se încheie şi rezolvarea cerinţei b) a problemei propuse, deci nu există perechi de numere raţionale distincte (x, y), pentru care $f(x) = f(y)$.

Comentarii:

Gradul de dificultate al cerinţei b) a fost generat de rezolvarea unei probleme care poate fi de sine stătătoare, în această formulare putând fi abordată la nivelul anilor de studiu începând cu clasa a 6-a:

Demonstraţi că nu există perechi de numere raţionale distincte (x, y), pentru care $x^2 + xy + y^2 = 2$.

Enunţul anterior poate fi introdus într-un context de generalizare astfel:

Fie p,q numere întregi. Demonstraţi că nu există perechi de numere raţionale distincte (x,y), pentru care $x^2+(2p+1)xy+y^2=2q$.

O posibilă altă abordare, la nivelul claselor a 8-a / a 9-a, ar putea fi cea în care tratăm ecuaţia $x^2+xy+y^2-2=0$ (***) ca o ecuaţie de gradul al doilea într-una dintre necunoscute, fie x aceasta, şi de parametru cealaltă dintre necunoscute (y). Cum $\Delta=y^2-4(y^2-2)=8-3y^2$, caz în care, pentru a exista soluţii reale ale ecuaţiei (***), impunem $\Delta\geq 0$, ceea ce restricţionează valorile lui y la un interval, $y\in\left[-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$.
Cum cerectarea noastră este în mulţimea numerelor raţionale, o altă condiţie necesară pentru existenţa unor valori raţionale pentru x este ca $\sqrt{\Delta}\in\mathbb{Q}$.
Deoarece este necesar ca $y\in\mathbb{Q}$, rezultă că putem considera fracţia ordinară ireductibilă $y=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, $(m,n)=1$, condiţia ca radicalul să reprezinte un număr rational devenind $\frac{\sqrt{8n^2-3m^2}}{n}\in\mathbb{Q}$, ceea ce implică a verifica dacă există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $8n^2-3m^2=k^2$ sau, echivalent $8n^2=3m^2+k^2$. În mod evident, membrul stâng fiind par, rezultă că m şi k au acceaşi paritate. Cum relaţia anterioară este echivalentă cu $4(2n^2-m^2)=(k-m)(k+m)$ (******), putem continua studiul pe două cazuri:

Cazul I:

m şi k pare,
deci putem considera $m=2^a m'$, $m'\in\mathbb{Z}, a\in\mathbb{N}^*$, m' impar, respectiv $k=2^b k'$, $k'\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$, k' impar.

Cum $(m,n)=1$, rezultă că n este impar.
Relaţia (******) devine în aceste condiţii:
$$2^3\underbrace{(n^2-2m'^2)}_{A}=2^{\min(2a,2b)}\underbrace{(2^{b-\min(a,b)}k'-2^{a-\min(a,b)}m')}_{B}\underbrace{(2^{b-\min(a,b)}k+2^{a-\min(a,b)}m)}_{C}.$$
În notaţiile evidenţiate anterior, valorile expresiilor A, B şi C sunt impare.

De asemenea, se poate constata faptul că membrul stâng este divizibil cu 2^3, dar nu şi cu 2^4, pe când membrul drept este divizibil cu o putere a lui 2 de tip par.
În baza tuturor observaţiilor menţionate, egalitatea anterioară nu poate fi îndeplinită.

Cazul al II-lea:

m şi k impare,
deci putem considera $m = 2m'+1$, $m' \in \mathbb{Z}$, respectiv $k = 2k'+1$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Cum $(m,n)=1$, rezultă că n este par.
Relaţia (******) devine în aceste condiţii, necesitând doar prelucrarea membrului drept:
$4(2n^2 - m^2) = 4(k'-m')(k'+m'+1)$.
Se obţine echivalent $2n^2 - m^2 = (k'-m')(k'+m'+1)$.
În condiţiile date, membrul stâng este impar, şi cum $k'-m'$ şi $k'+m'$ au aceeaşi paritate, rezultă că cele două paranteze ale membrului drept sunt de parităţi diferite, produsul generând un membru mereu par, ceea ce afirmă imposibilitatea realizării egalităţii studiate.

Derivată din studiul anterior, ca problemă de sine stătătoare poate fi propusă următoarea:

Demonstraţi că oricare ar fi $m,n \in \mathbb{Z}$, $(m,n)=1$, $\sqrt{8n^2 - 3m^2} \notin \mathbb{Q}$.

Comentarii:

Raportându-ne la cerinţele problemei, utilizând proprietăţile fincţiilor derivabile pe $\mathbb{R}$, şirul lui Rolle (clasa a XI-a) ne permite studiul numărului de soluţii reale ale ecuaţiei ataşate $f(x)=0$ sau ale ecuaţiei $g(x)=0$, unde, pentru $a \in \mathbb{Q}$, utilizăm funcţia auxiliară $g(x) = f(x) - a$, oricare $x \in \mathbb{R}$, însă metoda permite doar abordarea cantitativă – a numărului de soluţii distincte, nu şi calitativă – în acest context referindu-ne la apartenenţa soluţiilor la un anumit domeniu de admisibilitate).

De asemenea, o altă direcţie de dezvoltare a studiului ar fi putut fi reprezentată de ecuaţiile algebrice cu coeficienţi raţionali / întregi (capitolul Polinoame, clasa a XII-a), referindu-ne aici la ecuaţia $x^3 - 2x - a = 0$, care ar putea completa şirul lui Rolle anterior menţionat, furnizând informaţia privind faptul că rădăcinile ecuaţiei pot fi în unul dintre următoarele cazuri:

- trei soluţii reale distincte, caz în care fie toate raţionale, fie una raţională şi două iraţionale (conjugate);
- o soluţie raţională şi două soluţii complex conjugate.

În sensul celor prezentate anterior, cerinţa de la punctul a) este una care se situează în cazul a 3 soluţii reale, dintre care una raţională şi două iraţionale (conjugate).

O ultimă legătură o facem cu rezolvarea ecuaţiilor algebrice de gradul III, în cazul de faţă având chiar formă redusă a ecuaţiei generale, $x^3 + px + q = 0$, unde $p, q \in \mathbb{R}$.
Pornind de la ideea standard de rezolvare (Tartaglia, Cardano, del Ferro – secolul XVI, Hudde – secolul XVII) de a folosi variabilele auxiliare u, v şi notaţia $x = u + v$, având la bază identitatea $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$, prin analogie cu $x^3 = -px - q$, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} u + v = x \\ u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}.$$

Prin ridicarea la puterea a treia, membru cu membru a ultimei ecuaţii a sistemului, considerăm sistemul:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases},$$

Acest sistem de ecuaţii simetrice (şi omogene) are drept soluţii – pentru cuburile variabilelor auxilare – soluţiile ecuaţiei de gradul al doilea în necunoscuta z (folosind relaţiile lui Viete):

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Cu alte cuvinte am redus studiul la o ecuaţie de gradul al doilea, aducând cerinţa la nivelul algortimilor uzuali din curriculum matematic obligatoriu, însă scopul materialului de faţă nu este prezentarea pe caz general a algrotimului de rezolvare, ci utilizarea etapelor sale pe caz particular al problemei, adică pentru ecuaţia $x^3 - 2x - a = 0$, cu $a \in \mathbb{Q}$, ceea ce conduce la rezolvarea ecuaţiei $z^2 - az + \frac{8}{27} = 0$, însă legătura cu studiul existenţei sau non-existenţei a cel puţin două soluţii distincte raţionale ale ecuaţiei în necunoscuta x devine un studiu mult mai complicat decât abordările anterior prezentate.

Concluzii:

- un context care iniţial pare a se adresa unui segment limita de aplicare matematică poate genera o abordare care să extindă domeniul iniţial, implicând varii domenii de cunoaştere matematică.
- nu trebuie pornit de la premisa că un enunţ simplu presupune şi o rezolvare simplă;
- elevul trebuie să-şi cultive gustul pentru a reflecta asupra unui rezultat matematic şi să fie încurajat să identifice conexiuni şi consecinţe care îi dezvoltă astfel creativitatea;
- alegerea problemei s-a dorit un exemplu privind nivelul de atingere al standardelor de învăţare matematică necesare unui parcurs educaţional la nivel universitar de calitate şi în alte sisteme de învăţământ, precum cel francez, pus în discuţie.

Conclusions:

- a context that initially appears to address a mathematical boundary segment may generate an approach that extends the initial domain, involving a variety of mathematical knowledge domains.
- it should not be assumed that a simple statement implies a simple solution;
- the student has to cultivate his / her attitude to reflect on a mathematical result and to be encouraged to identify connections and consequences that develop his / her creativity;
- the choice of the problem wanted an example of the level of attainment of the mathematical learning standards required for a high-quality educational pathway and other education systems such as the French one, under discussion.